ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ NĂM

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ TÍNH NGHIỆM GẦN ĐÚNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ NĂM

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ TÍNH NGHIỆM GẦN ĐÚNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2015

Phương trình đại số

và

Tính nghiệm gần đúng

Trần Thị Năm

ĐHKH Thái Nguyên

Thái Nguyên, năm 2013

Mục lục

Lời cảm ơn iii

Mở đầu 1

1 Phương trình và Định lý Hilbert về không điểm 4

1.1 Mở rộng đại số 4

1.1.1 Quan hệ tương đương 4

1.1.2 Mở rộng đơn 5

1.1.3 Mở rộng đại số 9

1.1.4 Một vài vận dụng 13

1.2 Phụ thuộc đại số và Định lý Hilbert về cơ sở 17

1.2.1 Phụ thuộc đại số 18

1.2.2 Định lý cơ sở của Hilbert 18

1.3 Định lý không điểm của Hilbert 21

2 Tính gần đúng nghiệm 25

2.1 Nghiệm của hệ đa thức 25

2.1.1 Kết thức và phép khử 25

2.1.2 Khái niệm kết thức và biệt thức 25

2.1.3 Biểu diễn kết thức qua nghiệm 32

2.1.4 Phép khử ẩn 35

2.1.5 Phép biến đổi Tschirnhaus 38

2.2 Xác định nghiệm gần đúng 42

2.2.1 Phương pháp truy hồi 42

2.2.2 Phương pháp dây cung 44
2.2.3 Phương pháp tiếp tuyến của Newton 46
2.2.4 Phương trình hàm ẩn 47
2.3 Phương pháp lặp và sự hội tụ của chúng 48
2.4 Ví dụ minh họa 57

Lời cảm ơn

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Đàm Văn Nhỉ - Thầy trực tiếp hướng dẫn khoa học đã tận tình chỉ bảo, giúp đỡ, góp ý để hoàn thiện luận văn này.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn, tác giả đã nhận được sự động viên, khuyến khích và tạo điều kiện giúp đỡ nhiệt tình của các cấp lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Tuyên Quang, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp trường phổ thông dân tộc Nội trú THPT tỉnh Tuyên Quang, bạn bè đồng nghiệp và gia đình.

Với tình cảm chân thành, tác giả xin cảm ơn Khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo - Trường Đại học Khoa học - Đại hoc Thái Nguyên, các thầy cô giáo tham gia giảng dạy, cung cấp kiến thức và tài liệu giúp tác giả học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn.

Mặc dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện nhưng luận văn không tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành từ các thầy giáo, cô giáo, bạn bè đồng nghiệp và bạn đọc. Xin chân trọng cảm ơn!

Tác giả

Mở đầu

Hai định lý của Hilbert về cơ sở và không điểm thuộc những kết quả cơ bản trong đại số. Chúng được vận dụng nhiều không chỉ trong lĩnh vực Đại số và Hình học đại số, mà chúng còn được vận dụng trong Lý thuyết số tổ hợp (Combinatorial Number Theory), trong Lý thuyết đồ thị và cả trong Tổ hợp. Đặc biệt, như nhà toán học Noga Alon (Tel Aviv University) nói, những vận dụng của hai định lý cơ bản ấy đã cho ta những kết quả sâu sắc trong Lý thuyết số và trong vấn đề tô màu đồ thị. Do vậy, những người học toán hay dạy toán cũng cần nghiên cứu hai định lý này khi có thể.

Trong chương trình toán phổ thông hiện nay, đặc biệt cho chuyên toán, phần phương trình và hệ phương trình chiếm một thời lượng khá lớn và ứng dụng nhiều trong các môn học khác cũng như trong thực tế. Khá nhiều sách tham khảo của nhiều tác giả cũng viết về chuyên đề này. Các tài liệu hiện có thường quan tâm đến các kỹ thuật và phương pháp giải các dạng, các lớp phương trình và hệ phương trình. Tuy nhiên, các phương pháp đại số (biến đổi tương đương, đặt ẩn phụ, đánh giá biểu thức...) giải phương trình, hệ phương trình thường chỉ giải được một số lớp phương trình và hệ phương trình nào đó, tức là không mang tính phổ quát. Hơn nữa khi giải phương trình ta thường biến đổi để đưa phương trình đang xét về phương trình đa thức. Nhiều bài toán ta không cần biết chính xác nghiệm cụ thể mà ta cần một vài tính chất có liên quan đến tập nghiệm. Vì vậy, học sinh, ngay cả học sinh chuyên toán, thường lúng túng khi gặp các dạng bài tập này. Do vậy, chúng ta cần mở rộng trường để phương trình có nghiệm trên trường mới và dựa vào Định lý

Viet để suy ra những tính chất của nghiệm mà ta quan tâm. Một vấn đề nữa mà chúng ta cũng hay gặp là việc giải một hệ phương trình nhiều ẩn, chúng ta thường làm loại bỏ một số phương trình nhưng không làm ảnh hưởng đến tập nghiệm của hệ đã cho. Chính vì vậy mà luận văn đặt vấn đề xét khái niệm phụ thuôc đại số, phương trình đại số và định lý cơ sở của Hilbert, định lý không điểm của Hilbert. Đặc biệt thông qua việc nghiên cứu cách giải gần đúng phương trình phi tuyến đề tài đề cập đến cách tính nghiệm gần đúng nhằm cung cấp thêm kiến thức về giải phương trình, hệ phương trình và các bài toán có liên quan phục vụ cho công tác giảng dạy và học tập môn toán, các môn học khác cũng như giải quyết các bài toán thực tế trong chương trình trung học phổ thông.

Luận văn được chia ra làm hai chương.

Chương 1 gồm ba mục. Mục 1.1 được dành để trình bày về mở rộng trường. Trong Mục 1.2, chúng tôi trình bày về khái niệm phụ thuộc đại số và Định lý Hilbert về cơ sở. Mục 1.3 tập trung trình bày về phương trình đại số, Định lý Hilbert về không điểm và một kết quả của Noga Alon. Kết quả chính là ba định lý sau.

Định lý 1.2.4 [Hilbert's Basis Theorem] *Mỗi idêan $I \neq (0)$ và $I \neq (1)$ của vành đa thức $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ đều có một hệ sinh hữu hạn.*

Định lý 1.3.2 [Hilbert's zero-theorem] *Giả sử $g(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ thỏa mãn $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$ khi $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ là nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Khi đó có các đa thức $b_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ và số nguyên dương s thỏa mãn

$$g(x_1, \ldots, x_n)^s = \sum_{i=1}^{r} b_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Định lý 1.3.4 [Noga Alon] *Giả thiết trường K có* $\operatorname{char}(K) = 0$. *Cho đa thức khác không $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) \in K[x]$. Ký hiệu các tập con*

$S_i \subset K$ *thỏa mãn* $|S_i| \geqslant 1$ *và* $p_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s)$ *với* $i = 1, \ldots, n$. *Nếu* $g(x)$ *triệt tiêu tại mọi nghiệm chung của* $p_1, \ldots, p_n$ *thì tồn tại đa thức* $q_1, \ldots, q_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *thỏa mãn* $\deg q_i \leqslant \deg g - \deg p_i$ *để*

$$g = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i.$$

Chương 2 gồm ba mục. Mục 2.1 được dành để trình bày về kết thức và một vài tính chất của nó. Trong Mục 2.2 chúng tôi trình bày về một vài phương pháp giải gần đúng phương trình phi tuyến. Mục 2.3 trình bày về phương pháp lặp để giải gần đúng phương trình. Kết quả chính là hai định lý sau.

Định lý 2.1.1 *Với hai đa thức* f_u *và* g_v *luôn có hai đa thức* $h(u, v, x)$ *và* $k(u, v, x)$ *thuộc* $K[u, v][x]$ *thỏa mãn hệ thức biểu diễn sau:*

$$\mathrm{Res}(f_u, g_v) = h(u, v, x) f_u + k(u, v, x) g_v.$$

Định lý 2.1.20 *Hệ phương trình* (A) $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \\ f, g \in \mathbb{R}[x, y] \end{cases}$ *được giải qua phương trình đa thức một ẩn.*

Chương 1

Phương trình và Định lý Hilbert về không điểm

Chương này tập trung xét một vài phần liên quan đến phương trình đại số và Định lý không điểm của Hlbert.

1.1 Mở rộng đại số

1.1.1 Quan hệ tương đương

Giả thiết tập $X \neq \emptyset$. Tích Carte $X \times X$ được định nghĩa như sau:

$$X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. Tập con S của $X \times X$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trong X. Nếu $(x, y) \in S$ thì ta nói *x có quan hệ S với y* và viết xSy.

Định nghĩa 1.1.2. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X. Quan hệ S được gọi là một *quan hệ tương đương* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(1) (Phản xạ) Với mọi $x \in X$ có xSx.

(2) (Đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy thì cũng có ySx.

(3) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz.